

### 0.0.1 Analyse du flux d'énergie

On considère que la propagation de la marées dans un estuaire est similaire à la propagation d'une onde barotrope dans un canal étroit. En négligeant dans un premier temps la dissipation, avec  $\eta$  l'élévation,  $t$  le temps,  $h$  la profondeur,  $u$  la vitesse d'écoulement,  $x$  la distance le long du fleuve/canal et  $g$  la pesanteur, on obtient donc des équations d'onde équivalentes à celle d'une onde plane en l'absence de force de Coriolis :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial t} &= -h \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - ru\end{aligned}\quad (1)$$

$r$  est un coefficient de frottement soit indépendant de la vitesse (frottement linéaire, caractéristique des zones de crèmes de vase en estuaire), soit dépendant de la vitesse (frottement turbulent quadratique) et se mettant alors sous la forme  $r = C_d \frac{|u|}{H}$ .

En prenant la solution, avec  $\eta^*$  et  $u^*$  les amplitudes complexes respectivement de l'élévation et de la vitesse :

$$\begin{aligned}k &= \omega c^{-1} \\ c &= \sqrt{gh} \\ \eta &= |\eta^*| \cos(\arg \eta^* + \omega t + kx) \\ u &= |\eta^*| \sqrt{gh^{-1}} \cos(\arg \eta^* + \omega t + kx) \\ &= |u^*| \cos(\arg \eta^* + \omega t + kx) \\ u^* &= \eta^* \sqrt{gh^{-1}}\end{aligned}\quad (2)$$

On a  $J$  le flux d'énergie tel que :

$$J = hu^* \cdot (\rho g \eta^*) \quad (3)$$

Avec (2) et (3), on obtient :

$$J = hu^* \cdot \left( \rho g \frac{u^*}{\sqrt{gh^{-1}}} \right) \quad (4)$$

on peut écrire la relation suivante entre  $J$  et  $u$ :

$$h^{-1} \gamma_u J = \rho |u^*|^2 \quad (5)$$

avec :

$$\gamma_u = h \frac{\sqrt{gh^{-1}}}{hg} = \frac{1}{\sqrt{gh}} \quad (6)$$

De manière à peu près identique pour la relation entre  $J$  et  $\eta$ , avec (2) et (3), on obtient :

$$J = h \eta^* \sqrt{gh^{-1}} \cdot (\rho g \eta^*) \quad (7)$$

on peut écrire la relation suivante entre  $J$  et  $\eta$ :

$$J = \gamma_\eta |\eta^*|^2 \quad (8)$$

avec :

$$\gamma_\eta = h \sqrt{gh^{-1}} \rho g = \rho g \sqrt{gh} \quad (9)$$

### 0.0.2 Cas linéaire

On a dans le cas linéaire :

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -\rho r h |u^*|^2 \quad (10)$$

Avec (5), on peut réécrire (10) de la manière suivante :

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -r \gamma_u J \quad (11)$$

On peut dériver 11 de la manière suivante :

$$J = J_0 e^{-r\gamma_u x} \quad (12)$$

D'où on obtient :

$$J_{\text{amont}} = J_{\text{aval}} e^{-r\gamma_u \Delta x} \quad (13)$$

On prend :

$$\gamma_0 = \gamma_u \Delta x \quad (14)$$

Avec (8), (13) et (14) on obtient :

$$\begin{aligned} \gamma_{\eta_{\text{amont}}} \eta_{\text{amont}}^2 &= \gamma_{\eta_{\text{aval}}} \eta_{\text{aval}}^2 e^{-\gamma_0 r} \\ \gamma_{\eta_{\text{amont}}}^{\frac{1}{2}} \eta_{\text{amont}} &= \gamma_{\eta_{\text{aval}}}^{\frac{1}{2}} \eta_{\text{aval}} e^{-\frac{1}{2} \gamma_0 r} \\ \frac{\eta_{\text{amont}}}{\eta_{\text{aval}}} &= \left( \frac{\gamma_{\eta_{\text{aval}}}}{\gamma_{\eta_{\text{amont}}}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \gamma_0 r} \\ \ln \frac{\eta_{\text{amont}}}{\eta_{\text{aval}}} &= \frac{1}{2} \ln \frac{\gamma_{\eta_{\text{aval}}}}{\gamma_{\eta_{\text{amont}}}} - \frac{1}{2} \gamma_0 r \end{aligned} \quad (15)$$

qu'on réécrit :

$$\ln_{\eta} = \gamma_1 - \frac{1}{2} \gamma_0 r \quad (16)$$

en notant :

$$\ln_{\eta} \equiv \ln (\eta_{\text{amont}} \eta_{\text{aval}}^{-1}) \quad (17)$$

et en prenant :

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \ln (\gamma_{\eta_{\text{aval}}} \gamma_{\eta_{\text{amont}}}^{-1}) \quad (18)$$

Finalement, on peut obtenir  $r$  à partir de  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  et  $\ln_{\eta}$  avec :

$$r = 2 \frac{\gamma_1 - \ln_{\eta}}{\gamma_0} \quad (19)$$

Comme le montre l'équation (19), on peut obtenir  $r$  à partir de  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  et  $\ln_{\eta}$ , ce dernier étant calculés à partir des observations amont et aval. Il reste donc à obtenir  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$ , qui dépendent de la géométrie du fleuve et donc ne peuvent être déterminé qu'expérimentalement avec 2 expériences de simulations avec deux valeurs de  $r$ , ci-après  $r_{(1)}$  et  $r_{(2)}$  et de deux valeurs de  $\ln_{\eta} \equiv \ln (\eta_{\text{amont}} \eta_{\text{aval}}^{-1})$ , ci-après  $\ln_{\eta(1)}$  et  $\ln_{\eta(2)}$  et obtenues à partir des 2 expériences avec  $r_{(1)}$  et  $r_{(2)}$ . En réécrivant (16) pour chaque expérience, on obtient :

$$\ln_{\eta(1)} = \gamma_1 - \frac{1}{2} \gamma_0 r_{(1)} \quad (20)$$

$$\ln_{\eta(2)} = \gamma_1 - \frac{1}{2} \gamma_0 r_{(2)} \quad (21)$$

En prenant la différence (20)-(21), on peut isoler  $\gamma_0$  avec :

$$\begin{aligned} \ln_{\eta(1)} - \ln_{\eta(2)} &= \gamma_1 - \frac{1}{2} \gamma_0 r_{(1)} - \gamma_1 + \frac{1}{2} \gamma_0 r_{(2)} = \frac{1}{2} \gamma_0 (r_{(1)} - r_{(2)}) \\ 2 \frac{\ln_{\eta(1)} - \ln_{\eta(2)}}{r_{(1)} - r_{(2)}} &= \gamma_0 \end{aligned} \quad (22)$$

Une fois  $\gamma_0$  obtenu, on peut donc obtenir  $\gamma_1$  avec 20 ou 21 :

$$\gamma_1 = \ln_{\eta(1)} + \frac{1}{2} \gamma_0 r_{(1)} = \ln_{\eta(2)} + \frac{1}{2} \gamma_0 r_{(2)} \quad (23)$$

Une fois  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  obtenus, il est donc possible d'avoir  $r$  en fonction de  $\ln_{\eta} \equiv \ln (\eta_{\text{amont}} \eta_{\text{aval}}^{-1})$  issu des observations avec l'équation (19).

### 0.0.3 Cas quadratique linéarisé

La linéarisation du cas quadratique consiste à noter :

$$r = C_d h^{-1} |u^*| \quad (24)$$

On réécrit donc 19 de la manière suivante :

$$\begin{aligned} C_d h^{-1} |u^*| &= 2 \frac{\gamma_1 - \ln \eta}{\gamma_0} \\ C_d &= 2h \frac{\gamma_1 - \ln \eta}{\gamma_0 |u^*|} \end{aligned} \quad (25)$$

qu'on réécrit :

$$C_d = 2 \frac{\gamma_1 - \ln \eta}{\gamma'_0} \quad (26)$$

en prenant, avec 14 et 6:

$$\gamma'_0 = \frac{\gamma_0 |u^*|}{h} = \frac{\gamma_u \Delta x |u^*|}{h} = \frac{\Delta x |u^*|}{h \sqrt{gh}} \quad (27)$$

D'après la fonction karman\_Cd2D dans TUGOm, en prenant  $H$  la hauteur d'eau et  $\kappa = 0.4$  la constante de Von Karmann (voir constants.h), on a  $C_d$  tel que :

$$C_d = \left( \kappa \frac{H - z_0}{H \ln \frac{H}{z_0} + z_0 - H} \right)^2 \quad (28)$$

En prenant en compte que  $H \gg z_0$ , on obtient l'approximation de  $C_d$  suivante :

$$\begin{aligned} C_d &\approx C_d^{\sim} = \left( \frac{\kappa}{\ln \frac{H}{z_0} - 1} \right)^2 \\ &= \left( \frac{\ln H - 1 - \ln z_0}{\kappa} \right)^{-2} \end{aligned} \quad (29)$$

Cette approximation est validée par la figure 1.

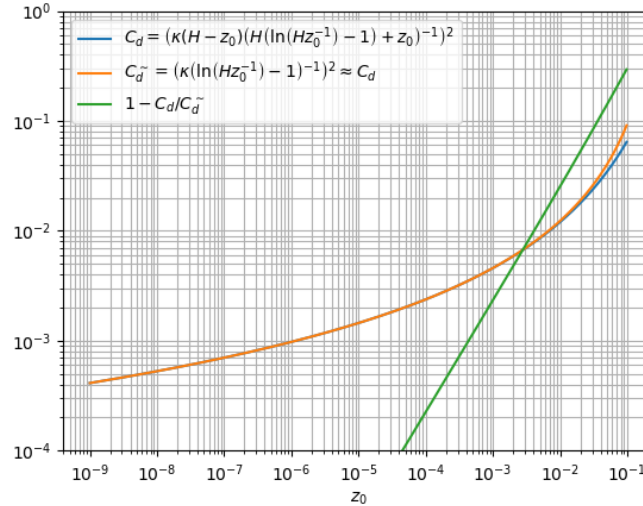


Fig. 1 : Validation de l'approximation de  $C_d$  par l'équation 29 pour  $H = 1$ . On voit que pour  $z_0 < 10^{-2}$ , on a une erreur sur  $C_d$  inférieure à 3%.

On peut réécrire (29) de la manière suivante :

$$C_d = (\gamma_2 - \kappa^{-1} \ln z_0)^{-2} \quad (30)$$

en prenant :

$$\gamma_2 = (\ln H - 1) \kappa^{-1} \quad (31)$$

À partir de (26) et (30), on obtient :

$$\begin{aligned}
2\gamma_0'^{-1} (\gamma_1 - \ln \eta) &= C_d = (\gamma_2 - \kappa^{-1} \ln z_0)^{-2} \\
(2\gamma_0'^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln \eta)^{-\frac{1}{2}} &= \gamma_2 - \kappa^{-1} \ln z_0 \\
\gamma_2 - (2\gamma_0'^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln \eta)^{-\frac{1}{2}} &= \kappa^{-1} \ln z_0 \\
\exp \left( \kappa \left[ \gamma_2 - (2\gamma_0'^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln \eta)^{-\frac{1}{2}} \right] \right) &= z_0
\end{aligned} \tag{32}$$

et on peut mettre en place la calibration analytique comme expliqué en 0.0.5.

#### 0.0.4 Cas quadratique

On a le travail de dissipation tel que :

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -C_d |u^*|^3 \tag{33}$$

d'où on obtient :

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -\gamma_0 C_d J^{\frac{3}{2}} \tag{34}$$

ce qui induit une décroissance du flux d'énergie en  $x^{-2}$  :

$$\begin{aligned}
J &= kx^{-2} \\
J^{1.5} &= k^{1.5} x^{-3} \\
\frac{\partial J}{\partial x} &= -2kx^{-3} = -2k^{-0.5} J^{1.5} = -\gamma_0 C_d J^{1.5} \\
k &= 4 (\gamma_0 C_d)^{-2} \\
J &= 4 (\gamma_0 C_d x + \gamma_1)^{-2}
\end{aligned} \tag{35}$$

d'où on ne peut pas dériver  $C_d$  de manière simple.

#### 0.0.5 Méthode

Comme le montre l'équation (32), on peut obtenir  $z_0$  à partir de  $\gamma_0'$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $\ln \eta$ , ce dernier étant calculés à partir des observations amont et aval. Les variations de  $\gamma_0'$  n'ont que peu d'impact sur  $z_0$ . Il reste donc à obtenir  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , qui dépendent de la géométrie du fleuve et donc ne peuvent être déterminés qu'expérimentalement avec 2 expériences de simulations. Tout ceci sera expliqué en 0.0.5.1. Du fait des non-linéarités et des interférences entre zones,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ne peuvent être déterminés précisément au premier essai : une itération est nécessaire. L'algorithme d'un cycle de calibration sera détaillé en ??.

##### 0.0.5.1 Développements mathématiques

On peut obtenir  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  à partir de deux valeurs de  $z_0$ , ci-après  $z_{0(1)}$  et  $z_{0(2)}$  et de deux valeurs de  $\ln \eta \equiv \ln (\eta_{\text{amont}} \eta_{\text{aval}}^{-1})$ , ci-après  $\ln \eta_{(1)}$  et  $\ln \eta_{(2)}$  et obtenues à partir des 2 expériences avec  $z_{0(1)}$  et  $z_{0(2)}$ . En réécrivant (32) pour chaque expérience, on obtient :

$$\gamma_2 - (2\gamma_0'^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln \eta_{(1)})^{-\frac{1}{2}} = \kappa^{-1} \ln z_{0(1)} \tag{36}$$

$$\gamma_2 - (2\gamma_0'^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln \eta_{(2)})^{-\frac{1}{2}} = \kappa^{-1} \ln z_{0(2)} \tag{37}$$

En prenant la différence (36)-(37), on peut commencer à isoler  $\gamma_1$  avec :

$$\begin{aligned}
\gamma_2 - (2\gamma_0'^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln \eta_{(1)})^{-\frac{1}{2}} - \gamma_2 - (2\gamma_0'^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln \eta_{(2)})^{-\frac{1}{2}} &= \kappa^{-1} \ln \frac{z_{0(1)}}{z_{0(2)}} \\
- (\gamma_1 - \ln \eta_{(1)})^{-\frac{1}{2}} + (\gamma_1 - \ln \eta_{(2)})^{-\frac{1}{2}} &= (2\gamma_0'^{-1})^{\frac{1}{2}} \kappa^{-1} \ln \frac{z_{0(1)}}{z_{0(2)}}
\end{aligned} \tag{38}$$

Si on prend :

$$\begin{aligned}
a &= \gamma_1 - \ln \eta_{(2)} \\
b &= \gamma_1 - \ln \eta_{(1)}
\end{aligned} \tag{39}$$

on peut réécrire 38 de la manière suivante :

$$a^{-\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}} = (2\gamma_0'^{-1})^{\frac{1}{2}} \kappa^{-1} \ln \frac{z_{0(1)}}{z_{0(2)}} \quad (40)$$

on sait aussi que :

$$a - b = \ln_{\eta(1)} - \ln_{\eta(2)} \quad (41)$$

L'équation (41) n'a pas de solution triviale et donc sa résolution est réalisée par une méthode itérative. On peut retrouver  $a$  et  $b$  avec la fonction  $f$  telle que  $f : (a - b, a^{-0.5} - b^{-0.5}) \rightarrow a$ . On donne à la fonction  $f$  les arguments suivants :

$$\begin{aligned} \delta &= a - b \\ \delta_{-\frac{1}{2}} &= a^{-\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (42)$$

La fonction  $f$  est itérative : on calcule une première solution avec :

$$\begin{aligned} a_0 &= \left( -2 \frac{\delta_{-\frac{1}{2}}}{\delta} \right)^{-\frac{2}{3}} \\ b_0 &= a_0 + \delta \end{aligned} \quad (43)$$

et on itère avec :

$$a_{n+1} = a_n \left( \frac{a_n^{-0.5} - b_n^{-0.5}}{\delta_{-\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (44)$$

Pour le reste du développement, on peut en tout cas retenir que :

$$f \left( \delta, \delta_{-\frac{1}{2}} \right) \approx \left( -2 \frac{\delta_{-\frac{1}{2}}}{\delta} \right)^{-\frac{2}{3}} \quad (45)$$

On a

$$\gamma_1 = \ln_{\eta(1)} + f \left( \ln_{\eta(1)} - \ln_{\eta(2)}, (2\gamma_0'^{-1})^{\frac{1}{2}} \kappa^{-1} \ln \frac{z_{0(1)}}{z_{0(2)}} \right) \approx \ln_{\eta(1)} + \left( -2 \frac{(2\gamma_0'^{-1})^{\frac{1}{2}} \kappa^{-1} \ln \frac{z_{0(1)}}{z_{0(2)}}}{\ln_{\eta(1)} - \ln_{\eta(2)}} \right)^{-\frac{2}{3}} \quad (46)$$

Une fois  $\gamma_1$  obtenu, on peut donc obtenir  $\gamma_2$  aussi à partir de 36 ou 37 :

$$\gamma_2 = \kappa^{-1} \ln z_{0(1)} + (2\gamma_0'^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln_{\eta(1)})^{-\frac{1}{2}} = \kappa^{-1} \ln z_{0(2)} + (2\gamma_0'^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln_{\eta(2)})^{-\frac{1}{2}} \quad (47)$$

Quand  $z_0$  est multiplié par 100 entre 2 expériences,  $\eta$  est diminué d'environ 10%. On a donc :

$$\begin{aligned} \ln \frac{z_{0(1)}}{z_{0(2)}} &\approx -4.6 \\ \ln_{\eta(1)} - \ln_{\eta(2)} &\approx 0.1 \\ (\gamma_1 - \ln_{\eta(1)}) \gamma_0'^{-\frac{1}{3}} &\approx \left( -2 \frac{2^{\frac{1}{2}} \kappa^{-1} \ln \frac{z_{0(1)}}{z_{0(2)}}}{\ln_{\eta(1)} - \ln_{\eta(2)}} \right)^{-\frac{2}{3}} \approx 0.021 \end{aligned} \quad (48)$$

On reprend l'équation (32) :

$$\exp \left( \kappa \left[ \gamma_2 - (2\gamma_0'^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln_{\eta})^{-\frac{1}{2}} \right] \right) = z_0 \quad (32)$$

Avec 47, on a :

$$\begin{aligned} z_0 &= \exp \left( \kappa \left[ \kappa^{-1} \ln z_{0(1)} + (2\gamma_0'^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln_{\eta(1)})^{-\frac{1}{2}} - (2\gamma_0'^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln_{\eta})^{-\frac{1}{2}} \right] \right) \\ &= \exp \left( \ln z_{0(1)} + \kappa (2\gamma_0'^{-1})^{\frac{1}{2}} \left[ (\gamma_1 - \ln_{\eta(1)})^{-\frac{1}{2}} - (\gamma_1 - \ln_{\eta})^{-\frac{1}{2}} \right] \right) \end{aligned}$$

La différence entre  $\ln_{\eta(1)}$  et  $\ln_{\eta}$  est en générale de 0.05. On a donc, pour  $\gamma_0' = 10$ :

$$\begin{aligned} (\gamma_1 - \ln_{\eta(1)})_{(\gamma_0'=10)} &= 0.021 \times 10^{\frac{1}{3}} = 0.05 \\ z_{0(\gamma_0'=10)} &= \exp \left( \ln z_{0(1)} + \kappa (2 \times 10^{-1})^{\frac{1}{2}} \left[ 0.05^{-\frac{1}{2}} - (0.05 + 0.05)^{-\frac{1}{2}} \right] \right) \\ z_{0(\gamma_0'=10)} &= \exp (\ln z_{0(1)} + 0.23) \end{aligned}$$

---

et pour  $\gamma'_0 = 10^4$ :

$$\begin{aligned}(\gamma_1 - \ln_{\eta(1)})_{(\gamma'_0=10^4)} &= 0.021 \times 10^{\frac{4}{3}} = 0.45 \\ z_{0(\gamma'_0=10^4)} &= \exp \left( \ln z_{0(1)} + \kappa (2 \times 10^{-4})^{\frac{1}{2}} \left[ 0.45^{-\frac{1}{2}} - (0.45 + 0.05)^{-\frac{1}{2}} \right] \right) \\ z_{0(\gamma'_0=10^4)} &= \exp (\ln z_{0(1)} + 4.3 \times 10^{-4})\end{aligned}$$

Changer  $\gamma'_0$  d'un facteur 1000 modifie  $z_0$  d'un facteur  $\exp(0.23) = 1.26$  ce qui est tout à fait négligeable.

Donc une fois  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  obtenus, il est donc possible d'avoir  $z_0$  en fonction de  $\ln_{\eta} \equiv \ln(\eta_{\text{amont}} \eta_{\text{aval}}^{-1})$  issu des observations avec l'équation (32) en négligeant la valeur de  $\gamma'_0$ .

[2 zones avec Langon-Castet/Dorte-La Réole]