

0.0.1 Analyse du flux d'énergie

On considère que la propagation de la marées dans un estuaire est similaire à la propagation d'une onde barotrope dans un canal étroit. En négligeant dans un premier temps la dissipation, avec η l'élévation, t le temps, h la profondeur, u la vitesse d'écoulement, x la distance le long du fleuve/canal et g la pesanteur, on obtient donc des équations d'onde équivalentes à celle d'une onde plane en l'absence de force de Coriolis :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial t} &= -h \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - ru\end{aligned}\quad (1)$$

r est un coefficient de frottement soit indépendant de la vitesse (frottement linéaire, caractéristique des zones de crèmes de vase en estuaire), soit dépendant de la vitesse (frottement turbulent quadratique) et se mettant alors sous la forme $r = C_d \frac{|u|}{H}$.

En prenant la solution, avec η^* et u^* les amplitudes complexes respectivement de l'élévation et de la vitesse :

$$\begin{aligned}k &= \omega c^{-1} \\ c &= \sqrt{gh} \\ \eta &= |\eta^*| \cos(\arg \eta^* + \omega t + kx) \\ u &= |\eta^*| \sqrt{gh^{-1}} \cos(\arg \eta^* + \omega t + kx) \\ &= |u^*| \cos(\arg \eta^* + \omega t + kx) \\ u^* &= \eta^* \sqrt{gh^{-1}}\end{aligned}\quad (2)$$

On a J le flux d'énergie tel que :

$$J = hu^* \cdot (\rho g \eta^*) \quad (3)$$

Avec (2) et (3), on obtient :

$$J = hu^* \cdot \left(\rho g \frac{u^*}{\sqrt{gh^{-1}}} \right) \quad (4)$$

on peut écrire la relation suivante entre J et u :

$$\gamma_u J = \rho |u^*|^2 \quad (5)$$

avec :

$$\gamma_u = \frac{\sqrt{gh^{-1}}}{hg} = \frac{1}{h\sqrt{gh}}$$

De manière à peu près identique pour la relation entre J et η , avec (2) et (3), on obtient :

$$J = h\eta^* \sqrt{gh^{-1}} \cdot (\rho g \eta^*) \quad (6)$$

on peut écrire la relation suivante entre J et η :

$$J = \gamma_\eta |\eta^*|^2 \quad (7)$$

avec :

$$\gamma_\eta = h\sqrt{gh^{-1}}\rho g = \rho g\sqrt{gh}$$

0.0.2 Cas linéaire

On a dans le cas linéaire [ajouter h et corriger gamma_u en fonction]:

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -\rho r |u^*|^2 \quad (8)$$

Avec (5), on peut réécrire (8) de la manière suivante :

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -r\gamma_u J \quad (9)$$

On peut dériver 9 de la manière suivante :

$$J = J_0 e^{-r\gamma_u x} \quad (10)$$

D'où on obtient :

$$J_{\text{amont}} = J_{\text{aval}} e^{-r\gamma_u \Delta x} \quad (11)$$

On prend :

$$\gamma_0 = \gamma_u \Delta x \quad (12)$$

Avec (7), (11) et (12) on obtient :

$$\begin{aligned} \gamma_{\eta_{\text{amont}}} \eta_{\text{amont}}^2 &= \gamma_{\eta_{\text{aval}}} \eta_{\text{aval}}^2 e^{-\gamma_0 r} \\ \gamma_{\eta_{\text{amont}}}^{\frac{1}{2}} \eta_{\text{amont}} &= \gamma_{\eta_{\text{aval}}}^{\frac{1}{2}} \eta_{\text{aval}} e^{-\frac{1}{2} \gamma_0 r} \\ \frac{\eta_{\text{amont}}}{\eta_{\text{aval}}} &= \left(\frac{\gamma_{\eta_{\text{aval}}}}{\gamma_{\eta_{\text{amont}}}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \gamma_0 r} \end{aligned} \quad (13)$$

[prendre le ln, puis abrégier avec les 2 suivants] On note :

$$\ln_{\eta} \equiv \ln (\eta_{\text{amont}} \eta_{\text{aval}}^{-1}) \quad (14)$$

et on prend :

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \ln (\gamma_{\eta_{\text{aval}}} \gamma_{\eta_{\text{amont}}}^{-1}) \quad (15)$$

Avec (13), (14) et (15), on obtient :

$$\begin{aligned} \ln_{\eta} &= \gamma_1 - \frac{1}{2} \gamma_0 r \\ \gamma_1 - \ln_{\eta} &= \frac{1}{2} \gamma_0 r \end{aligned} \quad (16)$$

ce qui montre d'ailleurs que \ln_{η} tend vers γ_1 quand r tend vers 0.
[déterminer r comme pour le quad]

0.0.3 Cas quadratique [linéarisé]

D'après la fonction karman_Cd2D dans TUGOm, en prenant H la hauteur d'eau et $\kappa = 0.4$ la constante de Von Karmann (voir constants.h), on a C_d tel que :

$$C_d = \left(\kappa \frac{H - z_0}{H \ln \frac{H}{z_0} + z_0 - H} \right)^2 \quad (17)$$

En prenant en compte que $H \gg z_0$, on obtient l'approximation de C_d suivante :

$$\begin{aligned} C_d &\approx \tilde{C}_d = \left(\frac{\kappa}{\ln \frac{H}{z_0} - 1} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\ln H - 1 - \ln z_0}{\kappa} \right)^{-2} \end{aligned} \quad (18)$$

Cette approximation est validée par la figure 1.

En prenant $[\gamma_2 = (\ln H - 1) \kappa^{-1}]$, on obtient :

$$C_d = (\gamma_2 - \kappa^{-1} \ln z_0)^{-2} \quad (19)$$

À partir de (16) et (19), on obtient :

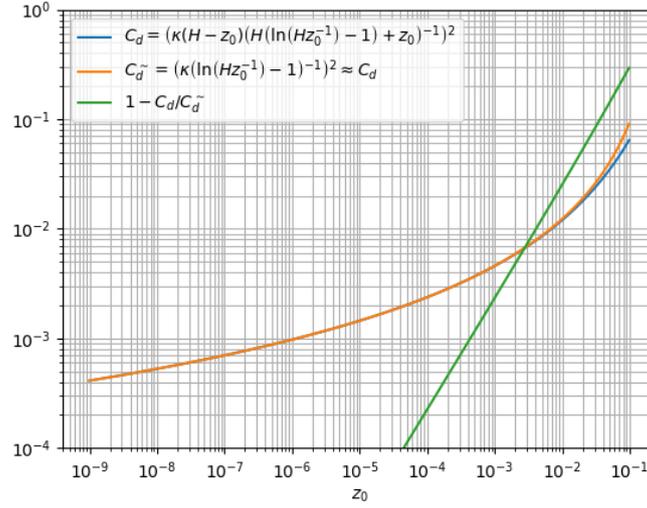


Fig. 1 : Validation de l'approximation de C_d par l'équation 18 pour $H = 1$. On voit que pour $z_0 < 10^{-2}$, on a une erreur sur C_d inférieure à 3%.

$$\begin{aligned}
2\gamma_0^{-1} (\gamma_1 - \ln \eta) &= C_d = (\gamma_2 - \kappa^{-1} \ln z_0)^{-2} \\
(2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln \eta)^{-\frac{1}{2}} &= \gamma_2 - \kappa^{-1} \ln z_0 \\
\gamma_2 - (2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln \eta)^{-\frac{1}{2}} &= \kappa^{-1} \ln z_0 \\
\exp \left(\kappa \left[\gamma_2 - (2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln \eta)^{-\frac{1}{2}} \right] \right) &= z_0
\end{aligned} \tag{20}$$

et on peut mettre en place la calibration analytique comme expliqué en 0.0.5.

0.0.4 [cas quadratique]

0.0.5 Méthode

Comme le montre l'équation (20), on peut obtenir z_0 à partir de γ_1 , γ_2 et $\ln \eta$, ce dernier étant calculés à partir des observations amont et aval. Il reste donc à obtenir γ_1 et γ_2 , qui dépendent de la géométrie du fleuve et donc ne peuvent être déterminés qu'expérimentalement avec 2 expériences de simulations, comme expliqué en 0.0.5.1. Du fait des non-linéarités et des interférences entre zones, γ_1 et γ_2 ne peuvent être déterminés précisément au premier essai : une itération est nécessaire. L'algorithme d'un cycle de calibration sera détaillé en ??.

0.0.5.1 Développements mathématiques

On peut obtenir γ_1 et γ_2 à partir de deux valeurs de z_0 , ci-après $z_{0(1)}$ et $z_{0(2)}$ et de deux valeurs de $\ln \eta \equiv \ln (\eta_{\text{amont}} \eta_{\text{aval}}^{-1})$, ci-après $\ln \eta_{(1)}$ et $\ln \eta_{(2)}$ et obtenues à partir des 2 expériences avec $z_{0(1)}$ et $z_{0(2)}$. En réécrivant (20) pour l'amont et l'aval, on obtient :

$$\gamma_2 - (2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln \eta_{(1)})^{-\frac{1}{2}} = \kappa^{-1} \ln z_{0(1)} \tag{21}$$

$$\gamma_2 - (2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln \eta_{(2)})^{-\frac{1}{2}} = \kappa^{-1} \ln z_{0(2)} \tag{22}$$

En prenant la différence (21)-(22), on peut commencer à isoler γ_1 avec :

$$\begin{aligned}
\gamma_2 - (2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln \eta_{(1)})^{-\frac{1}{2}} - \gamma_2 - (2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln \eta_{(2)})^{-\frac{1}{2}} &= \kappa^{-1} \ln \frac{z_{0(1)}}{z_{0(2)}} \\
-(\gamma_1 - \ln \eta_{(1)})^{-\frac{1}{2}} + (\gamma_1 - \ln \eta_{(2)})^{-\frac{1}{2}} &= (2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} \kappa^{-1} \ln \frac{z_{0(1)}}{z_{0(2)}}
\end{aligned} \tag{23}$$

En prenant [expliciter l'itératif] la fonction f telle que $f(a - b, a^{-0.5} - b^{-0.5}) = a$, on obtient γ_1 avec [monter aussi que peu sensible au gamma0]:

$$\gamma_1 = \ln \eta_{(1)} + f \left(\ln \eta_{(1)} - \ln \eta_{(2)}, (2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} \kappa^{-1} \ln \frac{z_{0(1)}}{z_{0(2)}} \right) \tag{24}$$

Une fois γ_1 obtenu, on peut donc obtenir γ_2 avec, aussi à partir de [21 ou 22 et réécrire en fonction]:

$$\gamma_2 = \kappa^{-1} \ln z_0 + (2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln \eta)^{-0.5} \quad (25)$$

Une fois γ_1 et γ_2 obtenus, il est donc possible d'avoir z_0 en fonction de $\ln \eta \equiv \ln (\eta_{\text{amont}} \eta_{\text{aval}}^{-1})$ avec l'équation (20).