

## 0.0.1 Analyse du flux d'énergie

On considère que la propagation de la marées dans un estuaire est similaire à la propagation d'une onde barotrope dans un canal étroit. En négligeant dans un premier temps la dissipation, avec  $\eta$  l'élévation,  $t$  le temps,  $h$  la profondeur,  $u$  la vitesse d'écoulement,  $x$  la distance le long du fleuve/canal et  $g$  la pesanteur, on obtient donc des équations d'onde équivalentes à celle d'une onde plane en l'absence de force de Coriolis :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial t} &= -h \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - ru\end{aligned}\quad (1)$$

$r$  est un coefficient de frottement soit indépendant de la vitesse (frottement linéaire, caractéristique des zones de crèmes de vase en estuaire), soit dépendant de la vitesse (frottement turbulent quadratique) et se mettant alors sous la forme  $r = C_d \frac{|u|}{H}$ .

En prenant la solution, avec  $\eta^*$  et  $u^*$  les amplitudes complexes respectivement de l'élévation et de la vitesse :

$$\begin{aligned}k &= \omega c^{-1} \\ c &= \sqrt{gh} \\ \eta &= |\eta^*| \cos(\arg \eta^* + \omega t + kx) \\ u &= |\eta^*| \sqrt{gh^{-1}} \cos(\arg \eta^* + \omega t + kx) \\ &= |u^*| \cos(\arg \eta^* + \omega t + kx) \\ u^* &= \eta^* \sqrt{gh^{-1}}\end{aligned}\quad (2)$$

On a  $J$  le flux d'énergie tel que :

$$J = hu^* \cdot (\rho g \eta^*) \quad (3)$$

Avec (2) et (3), on obtient [réécrire et éclater avec « de manière identique »]:

$$\begin{aligned}J &= hu^* \cdot \left( \rho g \frac{u^*}{\sqrt{gh^{-1}}} \right) \\ \gamma_u &= h \left( \frac{g}{\sqrt{gh^{-1}}} \right) = h\sqrt{gh} \\ J &= \rho \gamma_u |u^*|^2\end{aligned}\quad (4)$$

$$\begin{aligned}J &= h\eta^* \sqrt{gh^{-1}} \cdot (\rho g \eta^*) \\ \gamma_\eta &= g\sqrt{gh} \\ J &= \rho \gamma_\eta |\eta^*|^2\end{aligned}\quad (5)$$

## 0.0.2 Cas linéaire

Dans le cas linéaire, on a le travail de la dissipation tel que :

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -\rho r |u^*|^2 \quad (6)$$

Avec (4) et (6), on obtient :

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -\gamma_0^{-1} r J \quad (7)$$

La dissipation d'un bout à l'autre d'une zone induit donc une décroissance exponentielle du flux d'énergie :

$$J_{\text{amont}} = J_{\text{aval}} e^{-\gamma_0 r \Delta x} \quad (8)$$

d'où les relations suivantes entre les amplitudes des élévations :

$$\begin{aligned}\eta_{\text{amont}}^2 &\propto \eta_{\text{aval}}^2 e^{-\gamma_0 r} \\ \eta_{\text{amont}} &\propto \eta_{\text{aval}} e^{-\frac{1}{2} \gamma_0 r}\end{aligned}\quad (9)$$

En notant  $\ln_\eta \equiv \ln(\eta_{\text{amont}}\eta_{\text{aval}}^{-1})$ , on obtient, avec  $\gamma_1$  une constante de proportionalité donnant le logarithme népérien du rapport amont/aval des facteurs de conversion entre  $J$  et  $\eta^2$ :

$$\ln_\eta \equiv \ln \frac{\eta_{\text{amont}}}{\eta_{\text{aval}}} = \gamma_1 - \frac{1}{2}\gamma_0 r$$

$$\gamma_1 - \ln_\eta \propto r \quad (10)$$

ce qui montre d'ailleurs que  $\ln_\eta$  tend vers  $\gamma_1$  quand  $r$  tend vers 0.

[aller jusqu'à la détermination de  $r$ ]

Avec  $\mu$  la viscosité et  $\rho$  la masse volumique, on a  $r$  tel que :

$$r = \frac{3\mu}{\rho h^2} \quad (11)$$

Il ne semble donc pas nécessaire de développer plus en avant le cas linéaire, mais son développement, en particulier l'équation 10, sera utile pour le cas quadratique.

### 0.0.3 Cas quadratique

[remettre le développement de la version précédente]

En remplaçant  $\rho r$  par  $C_d |u^*|$ , on a :

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -C_d |u^*| |u^*|^2$$

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -C_d |u^*| \rho^{-1} \gamma_0^{-1} J \quad (12)$$

En considérant que les variations de  $|\eta^*| \propto |u^*| \propto J^{0.5}$  sont faibles d'une étape à l'autre de la calibration, on peut dériver 12 de la manière suivante :

$$J = J_0 e^{-C_d |u^*| \rho^{-1} \gamma_0^{-1} x} \quad (13)$$

En prenant  $\gamma_J = |u^*| \rho^{-1} \gamma_0^{-1}$ , on obtient :

$$J = J_0 e^{-\gamma_J C_d x}$$

$$J_{\text{amont}} = J_{\text{aval}} e^{-\gamma_J C_d \Delta x} \quad (14)$$

Avec (5) et en prenant  $\gamma_0 = \gamma_J \Delta x$ , on obtient :

$$\gamma_{\eta_{\text{amont}}} \eta_{\text{amont}}^2 = \gamma_{\eta_{\text{aval}}} \eta_{\text{aval}}^2 e^{-\gamma_0 C_d}$$

$$\gamma_{\eta_{\text{amont}}}^{\frac{1}{2}} \eta_{\text{amont}} = \gamma_{\eta_{\text{aval}}}^{\frac{1}{2}} \eta_{\text{aval}} e^{-\frac{1}{2} \gamma_0 C_d}$$

$$\frac{\eta_{\text{amont}}}{\eta_{\text{aval}}} = \left( \frac{\gamma_{\eta_{\text{aval}}}}{\gamma_{\eta_{\text{amont}}}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \gamma_0 C_d} \quad (15)$$

En notant  $\ln_\eta \equiv \ln(\eta_{\text{amont}}\eta_{\text{aval}}^{-1})$  et  $\gamma_1 = \frac{1}{2} \ln(\gamma_{\eta_{\text{aval}}}\gamma_{\eta_{\text{amont}}}^{-1})$ , on obtient :

$$\ln_\eta = \gamma_1 - \frac{1}{2}\gamma_0 C_d$$

$$\gamma_1 - \ln_\eta = \frac{1}{2}\gamma_0 C_d \quad (16)$$

ce qui montre d'ailleurs que  $\ln_\eta$  tend vers  $\gamma_1$  quand  $C_d$  tend vers 0.

D'après la fonction karman\_Cd2D dans TUGOm, en prenant  $H$  la hauteur d'eau et  $\kappa = 0.4$  la constante de Von Karmann (voir constants.h), on a  $C_d$  tel que :

$$C_d = \left( \kappa \frac{H - z_0}{H \ln \frac{H}{z_0} + z_0 - H} \right)^2 \quad (17)$$

En prenant en compte que  $H \gg z_0$ , on obtient l'approximation de  $C_d$  suivante :

$$\begin{aligned} C_d &\approx C_d^{\sim} = \left( \frac{\kappa}{\ln \frac{H}{z_0} - 1} \right)^2 \\ &= \left( \frac{\ln H - 1 - \ln z_0}{\kappa} \right)^{-2} \end{aligned} \quad (18)$$

Cette approximation est validée par la figure 1.

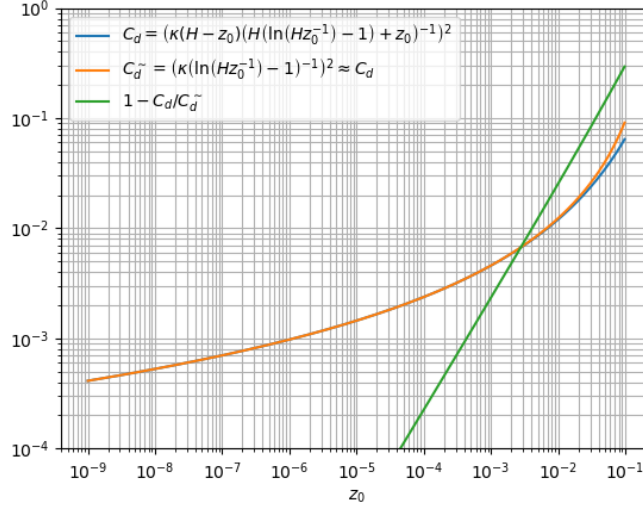


Fig. 1 : Validation de l'approximation de  $C_d$  par l'équation 18 pour  $H = 1$ . On voit que pour  $z_0 < 10^{-2}$ , on a une erreur sur  $C_d$  inférieure à 3%.

En prenant  $\gamma_2 = (\ln H - 1) \kappa^{-1}$ , on obtient :

$$C_d = (\gamma_2 - \kappa^{-1} \ln z_0)^{-2} \quad (19)$$

À partir de (16) et (19), on obtient :

$$\begin{aligned} 2\gamma_0^{-1} (\gamma_1 - \ln \eta) &= C_d = (\gamma_2 - \kappa^{-1} \ln z_0)^{-2} \\ (2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln \eta)^{-\frac{1}{2}} &= \gamma_2 - \kappa^{-1} \ln z_0 \\ \gamma_2 - (2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln \eta)^{-\frac{1}{2}} &= \kappa^{-1} \ln z_0 \\ \exp \left( \kappa \left[ \gamma_2 - (2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln \eta)^{-\frac{1}{2}} \right] \right) &= z_0 \end{aligned} \quad (20)$$

et on peut mettre en place la calibration analytique comme expliqué en 0.0.4.

## 0.0.4 Méthode

Comme le montre l'équation (20), on peut obtenir  $z_0$  à partir de  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $\ln \eta$ , ce dernier étant calculés à partir des observations amont et aval. Il reste donc à obtenir  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , qui dépendent de la géométrie du fleuve et donc ne peuvent être déterminés qu'expérimentalement avec 2 expériences de simulations, comme expliqué en 0.0.4.1. Du fait des non-linéarités et des interférences entre zones,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ne peuvent être déterminés précisément au premier essai : une itération est nécessaire. L'algorithme d'un cycle de calibration sera détaillé en ??.

### 0.0.4.1 Développements mathématiques

On peut obtenir  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  à partir de deux valeurs de  $z_0$ , ci-après  $z_{0(1)}$  et  $z_{0(2)}$  et de deux valeurs de  $\ln \eta \equiv \ln (\eta_{\text{amont}} \eta_{\text{aval}}^{-1})$ , ci-après  $\ln \eta_{(1)}$  et  $\ln \eta_{(2)}$  et obtenues à partir des 2 expériences avec  $z_{0(1)}$  et  $z_{0(2)}$ . En réécrivant (20) pour l'amont et l'aval, on obtient :

$$\gamma_2 - (2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln \eta_{(1)})^{-\frac{1}{2}} = \kappa^{-1} \ln z_{0(1)} \quad (21)$$

$$\gamma_2 - (2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln \eta_{(2)})^{-\frac{1}{2}} = \kappa^{-1} \ln z_{0(2)} \quad (22)$$

En prenant la différence (21)-(22), on peut commencer à isoler  $\gamma_1$  avec :

$$\begin{aligned} \gamma_2 - (2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln_{\eta(1)})^{-\frac{1}{2}} - \gamma_2 - (2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln_{\eta(2)})^{-\frac{1}{2}} &= \kappa^{-1} \ln \frac{z_0(1)}{z_0(2)} \\ - (\gamma_1 - \ln_{\eta(1)})^{-\frac{1}{2}} + (\gamma_1 - \ln_{\eta(2)})^{-\frac{1}{2}} &= (2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} \kappa^{-1} \ln \frac{z_0(1)}{z_0(2)} \end{aligned} \quad (23)$$

En prenant la fonction  $f$  telle que  $f(a - b, a^{-0.5} - b^{-0.5}) = a$ , on obtient  $\gamma_1$  avec :

$$\gamma_1 = \ln_{\eta(1)} + f \left( \ln_{\eta(1)} - \ln_{\eta(2)}, (2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} \kappa^{-1} \ln \frac{z_0(1)}{z_0(2)} \right) \quad (24)$$

Une fois  $\gamma_1$  obtenu, on peut donc obtenir  $\gamma_2$  avec, aussi à partir de 20:

$$\gamma_2 = \kappa^{-1} \ln z_0 + (2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln_{\eta})^{-0.5} \quad (25)$$

Une fois  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  obtenus, il est donc possible d'avoir  $z_0$  en fonction de  $\ln_{\eta} \equiv \ln(\eta_{\text{amont}} \eta_{\text{aval}}^{-1})$  avec l'équation (20).