

0.0.1 Analyse du flux d'énergie

On considère que la propagation de la marées dans un estuaire est similaire à la propagation d'une onde barotrope dans un canal étroit. En négligeant dans un premier temps la dissipation, avec η l'élévation, t le temps, h la profondeur, u la vitesse d'écoulement, x la distance le long du fleuve/canal et g la pesanteur, on obtient donc des équations d'onde équivalentes à celle d'une onde plane en l'absence de force de Coriolis :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial t} &= -h \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - ru\end{aligned}\quad (1)$$

r est un coefficient de frottement soit indépendant de la vitesse (frottement linéaire, caractéristique des zones de crèmes de vase en estuaire), soit dépendant de la vitesse (frottement turbulent quadratique) et se mettant alors sous la forme $r = C_d \frac{|u|}{H}$.

En prenant la solution, avec η^* et u^* les amplitudes complexes respectivement de l'élévation et de la vitesse :

$$\begin{aligned}k &= \omega c^{-1} \\ c &= \sqrt{gh} \\ \eta &= |\eta^*| \cos(\arg \eta^* + \omega t + kx) \\ u &= |\eta^*| \sqrt{gh^{-1}} \cos(\arg \eta^* + \omega t + kx) \\ &= |u^*| \cos(\arg \eta^* + \omega t + kx) \\ u^* &= \eta^* \sqrt{gh^{-1}}\end{aligned}\quad (2)$$

On a J le flux d'énergie tel que :

$$J = hu^* \cdot (\rho g \eta^*) \quad (3)$$

Avec (??) et (??), on obtient [réécrire et éclater avec « de manière identique »]:

$$\begin{aligned}J &= hu^* \cdot \left(\rho g \frac{u^*}{\sqrt{gh^{-1}}} \right) \\ \gamma_u &= h \left(\frac{g}{\sqrt{gh^{-1}}} \right) = h\sqrt{gh} \\ J &= \rho \gamma_u |u^*|^2\end{aligned}\quad (4)$$

$$\begin{aligned}J &= h\eta^* \sqrt{gh^{-1}} \cdot (\rho g \eta^*) \\ \gamma_\eta &= g\sqrt{gh} \\ J &= \rho \gamma_\eta |\eta^*|^2\end{aligned}\quad (5)$$

0.0.2 Cas linéaire

Dans le cas linéaire, on a le travail de la dissipation tel que :

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -\rho r |u^*|^2 \quad (6)$$

Avec (??) et (??), on obtient :

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -\gamma_0^{-1} r J \quad (7)$$

La dissipation d'un bout à l'autre d'une zone induit donc une décroissance exponentielle du flux d'énergie :

$$J_{\text{amont}} = J_{\text{aval}} e^{-\gamma_0 r \Delta x} \quad (8)$$

d'où les relations suivantes entre les amplitudes des élévations :

$$\begin{aligned}\eta_{\text{amont}}^2 &\propto \eta_{\text{aval}}^2 e^{-\gamma_0 r} \\ \eta_{\text{amont}} &\propto \eta_{\text{aval}} e^{-\frac{1}{2}\gamma_0 r}\end{aligned}\quad (9)$$

En notant $\ln_\eta \equiv \ln(\eta_{\text{amont}}\eta_{\text{aval}}^{-1})$, on obtient, avec γ_1 une constante de proportionnalité donnant le logarithme népérien du rapport amont/aval des facteurs de conversion entre J et η^2 :

$$\ln_\eta \equiv \ln \frac{\eta_{\text{amont}}}{\eta_{\text{aval}}} = \gamma_1 - \frac{1}{2}\gamma_0 r$$

$$\gamma_1 - \ln_\eta \propto r \quad (10)$$

ce qui montre d'ailleurs que \ln_η tend vers γ_1 quand r tend vers 0.

[aller jusqu'à la détermination de r]

Avec μ la viscosité et ρ la masse volumique, on a r tel que :

$$r = \frac{3\mu}{\rho h^2} \quad (11)$$

Il ne semble donc pas nécessaire de développer plus en avant le cas linéaire, mais son développement, en particulier l'équation ??, sera utile pour le cas quadratique.

0.0.3 Cas quadratique

On a le travail de dissipation tel que :

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -C_d |u^*|^3$$

d'où on obtient :

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -\gamma_0 C_d J^{\frac{3}{2}}$$

ce qui induit une décroissance du flux d'énergie en x^{-2} :

$$J = kx^{-2}$$

$$J^{1.5} = k^{1.5}x^{-3}$$

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -2kx^{-3} = -2k^{-0.5}J^{1.5} = -\gamma_0 C_d J^{1.5}$$

$$k = 4(\gamma_0 C_d)^{-2}$$

$$J = 4(\gamma_0 C_d x + \gamma_1)^{-2}$$

d'où on ne peut pas dériver C_d de manière simple. Cependant, en considérant que les variations sont faibles, on peut dériver de la manière linéarisée suivante :

En remplaçant ρr par $C_d |u^*|$, on a :

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -C_d |u^*| |u^*|^2$$

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -C_d |u^*| \rho^{-1} \gamma_0^{-1} J \quad (12)$$

En considérant que les variations de $|u^*| \propto J^{0.5}$ sont faibles d'une étape à l'autre de la calibration, on peut dériver ?? de la manière suivante :

$$J = J_0 e^{-C_d |u^*| \rho^{-1} \gamma_0^{-1} x} \quad (13)$$

En prenant $\gamma_J = |u^*| \rho^{-1} \gamma_0^{-1}$, on obtient :

$$J = J_0 e^{-\gamma_J C_d x}$$

$$J_{\text{amont}} = J_{\text{aval}} e^{-\gamma_J C_d \Delta x} \quad (14)$$

Avec (??) et en prenant $\gamma_0 = \gamma_J \Delta x$, on obtient :

$$\gamma_{\eta_{\text{amont}}} \eta_{\text{amont}}^2 = \gamma_{\eta_{\text{aval}}} \eta_{\text{aval}}^2 e^{-\gamma_0 C_d}$$

$$\gamma_{\eta_{\text{amont}}}^{\frac{1}{2}} \eta_{\text{amont}} = \gamma_{\eta_{\text{aval}}}^{\frac{1}{2}} \eta_{\text{aval}} e^{-\frac{1}{2} \gamma_0 C_d}$$

$$\frac{\eta_{\text{amont}}}{\eta_{\text{aval}}} = \left(\frac{\gamma_{\eta_{\text{aval}}}}{\gamma_{\eta_{\text{amont}}}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \gamma_0 C_d} \quad (15)$$

En notant $\ln_\eta \equiv \ln(\eta_{\text{amont}}\eta_{\text{aval}}^{-1})$ et $\gamma_1 = \frac{1}{2} \ln(\gamma_{\eta_{\text{aval}}}\gamma_{\eta_{\text{amont}}}^{-1})$, on obtient :

$$\begin{aligned}\ln_\eta &= \gamma_1 - \frac{1}{2}\gamma_0 C_d \\ \gamma_1 - \ln_\eta &= \frac{1}{2}\gamma_0 C_d\end{aligned}\quad (16)$$

ce qui montre d'ailleurs que \ln_η tend vers γ_1 quand C_d tend vers 0.

D'après la fonction karman_Cd2D dans TUGOm, en prenant H la hauteur d'eau et $\kappa = 0.4$ la constante de Von Karmann (voir constants.h), on a C_d tel que :

$$C_d = \left(\kappa \frac{H - z_0}{H \ln \frac{H}{z_0} + z_0 - H} \right)^2 \quad (17)$$

En prenant en compte que $H \gg z_0$, on obtient l'approximation de C_d suivante :

$$\begin{aligned}C_d &\approx C_d^- = \left(\frac{\kappa}{\ln \frac{H}{z_0} - 1} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\ln H - 1 - \ln z_0}{\kappa} \right)^{-2}\end{aligned}\quad (18)$$

Cette approximation est validée par la figure ??.

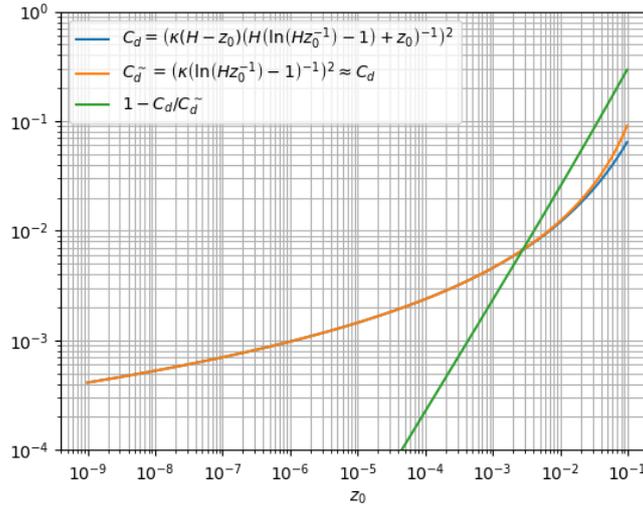


Fig. 1 : Validation de l'approximation de C_d par l'équation ?? pour $H = 1$. On voit que pour $z_0 < 10^{-2}$, on a une erreur sur C_d inférieure à 3%.

En prenant $\gamma_2 = (\ln H - 1) \kappa^{-1}$, on obtient :

$$C_d = (\gamma_2 - \kappa^{-1} \ln z_0)^{-2} \quad (19)$$

À partir de (??) et (??), on obtient :

$$\begin{aligned}2\gamma_0^{-1} (\gamma_1 - \ln_\eta) &= C_d = (\gamma_2 - \kappa^{-1} \ln z_0)^{-2} \\ (2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln_\eta)^{-\frac{1}{2}} &= \gamma_2 - \kappa^{-1} \ln z_0 \\ \gamma_2 - (2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln_\eta)^{-\frac{1}{2}} &= \kappa^{-1} \ln z_0 \\ \exp \left(\kappa \left[\gamma_2 - (2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln_\eta)^{-\frac{1}{2}} \right] \right) &= z_0\end{aligned}\quad (20)$$

et on peut mettre en place la calibration analytique comme expliqué en ??.

0.0.4 Méthode

Comme le montre l'équation (??), on peut obtenir z_0 à partir de γ_1 , γ_2 et \ln_{η} , ce dernier étant calculés à partir des observations amont et aval. Il reste donc à obtenir γ_1 et γ_2 , qui dépendent de la géométrie du fleuve et donc ne peuvent être déterminés qu'expérimentalement avec 2 expériences de simulations, comme expliqué en ???. Du fait des non-linéarités et des interférences entre zones, γ_1 et γ_2 ne peuvent être déterminés précisément au premier essai : une itération est nécessaire. L'algorithme d'un cycle de calibration sera détaillé en ??.

0.0.4.1 Développements mathématiques

On peut obtenir γ_1 et γ_2 à partir de deux valeurs de z_0 , ci-après $z_{0(1)}$ et $z_{0(2)}$ et de deux valeurs de $\ln_{\eta} \equiv \ln(\eta_{\text{amont}}\eta_{\text{aval}}^{-1})$, ci-après $\ln_{\eta(1)}$ et $\ln_{\eta(2)}$ et obtenues à partir des 2 expériences avec $z_{0(1)}$ et $z_{0(2)}$. En réécrivant (??) pour l'amont et l'aval, on obtient :

$$\gamma_2 - (2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln_{\eta(1)})^{-\frac{1}{2}} = \kappa^{-1} \ln z_{0(1)} \quad (21)$$

$$\gamma_2 - (2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln_{\eta(2)})^{-\frac{1}{2}} = \kappa^{-1} \ln z_{0(2)} \quad (22)$$

En prenant la différence (??)-(??), on peut commencer à isoler γ_1 avec :

$$\begin{aligned} \gamma_2 - (2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln_{\eta(1)})^{-\frac{1}{2}} - \gamma_2 - (2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln_{\eta(2)})^{-\frac{1}{2}} &= \kappa^{-1} \ln \frac{z_{0(1)}}{z_{0(2)}} \\ - (\gamma_1 - \ln_{\eta(1)})^{-\frac{1}{2}} + (\gamma_1 - \ln_{\eta(2)})^{-\frac{1}{2}} &= (2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} \kappa^{-1} \ln \frac{z_{0(1)}}{z_{0(2)}} \end{aligned} \quad (23)$$

En prenant la fonction f telle que $f(a - b, a^{-0.5} - b^{-0.5}) = a$, on obtient γ_1 avec :

$$\gamma_1 = \ln_{\eta(1)} + f\left(\ln_{\eta(1)} - \ln_{\eta(2)}, (2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} \kappa^{-1} \ln \frac{z_{0(1)}}{z_{0(2)}}\right) \quad (24)$$

Une fois γ_1 obtenu, on peut donc obtenir γ_2 avec, aussi à partir de ???:

$$\gamma_2 = \kappa^{-1} \ln z_0 + (2\gamma_0^{-1})^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \ln_{\eta})^{-0.5} \quad (25)$$

Une fois γ_1 et γ_2 obtenus, il est donc possible d'avoir z_0 en fonction de $\ln_{\eta} \equiv \ln(\eta_{\text{amont}}\eta_{\text{aval}}^{-1})$ avec l'équation (??).